2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN EDEB. FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ ANALİZ 2 DERSİ ARASINAV SORULARI

1) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Buna göre

(a) $x\neq 0$ için $f'(x)-$i bulunuz.

(b) $f(x)-$in $x=0$ noktasında sürekli olduğunu gösteriniz.

(c) Türev tanımını kullanarak $f'(0)-$ın mevcut olmadığını gösteriniz. (15 puan)

2) (a) $y=f(x)=x\tan\frac{1}{x}$ için $\frac{d^2y}{dx^2}=?$

(b) $x^2=\dfrac{\cot y}{1+\cos ecy}$ şeklinde verilen $y=f(x)$ için $\frac{dy}{dx}=?$

(c) $\begin{cases} x(t)=\sin t-\ln t \\ y(t)=e^{t^2+t}\sqrt{\sec t} \end{cases}$ şeklinde verilen $y=f(x)$ için $\frac{dy}{dx}=?$ (15 puan)

3) f ve g fonksiyonları her $x\in\mathbb{R}$ için $f'(x)=g(x)$ ve $g'(x)=-f(x)$ koşullarını sağlarsa $f^2(x)+g^2(x)$ fonksiyonunun sabit olduğunu gösteriniz. (10 puan)

4) (a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(x+1)}{1-\cos 2x}=?$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\cos\frac{2}{x}\right]^{x^2}=?$ limitlerini L'Hospital kuralını kullanarak bulunuz. (10 puan)

5) (a) $\int \ln(x^2+4)\cdot dx=?$

(b) $\int\sqrt{\tan x}\cdot\sec^4 x\cdot dx=?$ (15 puan)

6) (a) $\int\dfrac{1}{1-\tan x}dx=?$

(b) $\int x^3\cdot\sqrt{5-x^2}\cdot dx=?$ (15 puan)

7) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$ eğrisini ayrıntılı inceleyip grafiğini çiziniz. (20 puan)

NOT:

- Saat 16:00'dan sonra gelen sınav belgeleri her ne sebeple olursa olsun kabul edilmeyecektir.
- Soruların çözümünü ayrıntılı bir şekilde yapınız.
- Adınızı, soyadınızı ve cevaplarınızı yazarken renkli kalem kullanınız.
- Sisteme göndermeden önce dosyayı kontrol ediniz. Bir tek pdf dosyası olarak hazırlayıp yükleyiniz.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN-EDB. FAK.
MATEMATİK BÖLÜMÜ MAT102 ANALİZ 2 DERSİ
ARASINAV SORULARI ÇÖZÜMLERİ

1) a) $x \neq 0$ için $f'(x) = ?$

$$f'(x) = x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

b) $$\lim_{x \to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \overset{(u=\frac{1}{x})}{=} \lim_{u \to \infty} \frac{\sin u}{u} = 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$, $x=0$ da süreklidir

c) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot \sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} \sin\frac{1}{h} \text{ yok}$$

limit mevcut olmadığından $f'(0)$ yoktur.

2) a) $y = f(x) = x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{x}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2}{x} \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\sec\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \sec\left(\frac{1}{x}\right) \sec\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \tan\frac{1}{x} + 0$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{x^3} \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right)}$$

b) $x^2 = \frac{\cot y}{1 + \csc y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = ?$

$$2x = \frac{(1+\csc y)\,(-\csc^2 y) \cdot \frac{dy}{dx} - (\cot y)(-\csc y \cdot \cot y) \cdot \frac{dy}{dx}}{(1+\csc y)^2}$$

$$2x \cdot (1+\csc y)^2 = -\csc y\left(\csc y + \csc^2 y - \cot^2 y\right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$\csc^2 y - \cot^2 y = 1$ old.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(1+\csc y)}{\csc y}}$$

2.c) $\left.\begin{array}{l} x(t) = \sin t - \ln t \\ y(t) = e^{t^2+t} \cdot \sqrt{\sec t} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = ?$

$$\frac{dy}{dt} = (2t+1) \cdot e^{t^2+t} \cdot \sqrt{\sec t} + e^{t^2+t} \cdot \frac{\sec t \cdot \tan t}{2\sqrt{\sec t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = (2t+1) \cdot e^{t^2+t} \sqrt{\sec t} + e^{t^2+t} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sec t} \cdot \tan t$$

$$\frac{dy}{dt} = e^{t^2+t} \cdot \sqrt{\sec t} \left[(2t+1) + \frac{1}{2} \tan t \right]$$

$$\frac{dx}{dt} = \cos t - \frac{1}{t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{t^2+t} \cdot \sqrt{\sec t} \left[(2t+1) + \frac{1}{2} \tan t \right]}{\cos t - \frac{1}{t}}}$$

3) $$\frac{d}{dx}\left(f^2(x) + g^2(x) \right) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) + 2 \cdot g(x) \cdot g'(x)$$
$$= \underbrace{2 \cdot f(x) \cdot g(x) + 2 \cdot g(x) \cdot (-f(x))}_{=0}$$

Türevi sıfır olan fonksiyon sabit olduğundan,
$\frac{d}{dx}\left(f^2(x) + g^2(x) \right) = 0 \Rightarrow f^2(x) + g^2(x) =$ sabit olur.

4) a) $$\lim_{x \to 0} \frac{x - \ln(x+1)}{1 - \cos 2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{2 \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{2(x+1) \sin 2x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4(x+1)\cos 2x + 2 \sin 2x} = \frac{1}{4}$$

b) $$\lim_{x \to +\infty} \left[\cos\left(\frac{2}{x}\right) \right]^{x^2} \overset{(1^\infty)}{=}$$

$$y = \left[\cos\left(\frac{2}{x}\right) \right]^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \cdot \ln\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right) \right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x^2}} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\left(-\frac{2}{x^2}\right)\cdot\left(-\sin\frac{2}{x}\right)}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}}{-\frac{2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} (-x)\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\frac{1}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} 2\cdot\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}\cdot\frac{1}{\lim_{x\to+\infty}\cos\left(\frac{2}{x}\right)}$$

$$= -2\cdot 1\cdot\frac{1}{1} = -2 \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{2}{x}\right)\right)^{x^2} = e^{-2} = 1/e^2}$$

5) a) $\int \ln(x^2+4)\,dx = ?$

$u = \ln(x^2+4) \Rightarrow du = \frac{2x}{x^2+4}\,dx$

$dv = dx \Rightarrow \boxed{v = x}$

$$\int \ln(x^2+4)\,dx = x\cdot\ln(x^2+4) - 2\cdot\int\frac{x^2}{x^2+4}\,dx$$

$$= x\cdot\ln(x^2+4) - 2\cdot\int\left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx$$

$$= x\cdot\ln(x^2+4) - 2x + 4\cdot\arctan\frac{x}{2} + C$$

b) $\int\sqrt{\tan x}\cdot\sec^4 x\,dx = \int \tan^{1/2}x\cdot(1+\tan^2 x)\cdot\sec^2 x\,dx$

$$= \int u^{1/2}\cdot(1+u^2)\,du$$

$$= \frac{2}{3}\cdot u^{3/2} + \frac{u^{\frac{5}{2}+1}}{\frac{5}{2}+1} + C$$

$\left(\begin{array}{l} u = \tan x \\ du = \sec^2 x\,dx \end{array}\right)$

$$= \frac{2}{3}\cdot\tan^{3/2}x + \frac{2}{7}\cdot\tan^{7/2}x + C$$

6) a) $\int \frac{1}{1-\tan x} dx = ?$ $\quad u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$,

$\tan x = \frac{2u}{1-u^2}$

$$\int \frac{dx}{1-\tan x} = \int \frac{2u^2-2}{(u^2+1)\cdot(u^2+2u-1)}$$

$$\frac{2u^2-2}{(u^2+1)\cdot(u^2+2u-1)} = \frac{u+1}{u^2+1} + \frac{-u-1}{u^2+2u-1}$$

$$\int \frac{dx}{1-\tan x} = \int \frac{u+1}{u^2+1} du + \int \frac{-u-1}{u^2+2u-1} du$$

$$= \frac{1}{2} \ln(u^2+1) + \arctan u - \frac{1}{2} \ln|u^2+2u-1| + C$$

$$= \arctan u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u^2+2u-1}{u^2+1} \right| + C$$

$$= \arctan u - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2u}{1+u^2} - \frac{1-u^2}{1+u^2} \right| + C$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln|\sin x - \cos x| + C$$

b) $\int x^3 \cdot \sqrt{5-x^2}\, dx = ?$ $\quad x = \sqrt{5} \sin\theta \Rightarrow dx = \sqrt{5} \cdot \cos\theta\, d\theta$

$$\int x^3 \cdot \sqrt{5-x^2}\, dx = \int 25 \cdot \sqrt{5} \sin^3\theta \cdot \cos^2\theta\, d\theta$$

$$= 25\sqrt{5} \int \sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$\left(\begin{array}{l} u = \cos\theta \\ du = -\sin\theta\, d\theta \end{array} \right)$

$$= 25\sqrt{5} \int (1-\cos^2\theta)\cdot \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$$

$$= -25\sqrt{5} \int (1-u^2)\cdot u^2\, du$$

$$= -25\cdot\sqrt{5} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} \right) + C$$

$$= -\frac{25}{3}\sqrt{5} \cdot \cos^3\theta + 5\sqrt{5} \cdot \cos^5\theta + C$$

7) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{(x+1)^2}$ için

→ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dir

→ $f(-x) = \dfrac{x^2-4}{(1-x)^2}$ olup $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x$

olduğundan ne tek nede çifttir.

→ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$ olup $x=-1$ sağdan düş. asimt

$\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$ 〃 〃 soldan 〃 〃

→ $\lim\limits_{x\to \mp\infty} f(x) = 1$ old.dan $y=1$ doğrusu $\pm\infty$ kollarda yatay asimtot olur.

→ $A(2,0)$, $B(-2,0)$ ve $C(0,-4)$ nokt. geçer.

→ $f'(x) = \dfrac{2x(x+1)^2 - (x^2-4).2(x+1)}{(x+1)^4} = \dfrac{2(x+4)}{(x+1)^3}$

olup $x=-1$ ve $x=-4$ kritik noktadır.

x	$-\infty$		-4		-1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0 ||	$+$	
f	$y=+1$	↗	$4/3$	↘	$-\infty$ || $-\infty$	↗	$y=1$